Άσκηση 1: (Θέμα 1ο)

Έστω τ.μ. X με σ.π.π. $f_X(x) = \begin{cases} a(1-x^2), & -1 \le x \le 1 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$ $\quad a>0$

α) Να υπολογίσετε το a και τη α.σ.κ. F_X;

β) — " — με τη χρήση f_X η $P(X>0)$

και — " — " — F_X η $P(|X|<\frac{1}{2})$

Να υπολογιστεί η $P(X>-\frac{1}{2} / X<\frac{1}{2})$

Να εξεταστεί αν τα $A=\{X>0\}$, $B=\{-\frac{1}{2} \le X \le \frac{1}{2}\}$ είναι ανεξάρτητα.

γ) Να υπολογιστεί η $E(X)$, $Var(X)$.

Λύση: α) $1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx \Rightarrow \int_{-1}^{1} a(1-x^2)\,dx = 1 \Rightarrow a\int_{-1}^{1} dx - a\int_{-1}^{1} x^2 dx$

$\Rightarrow a(1-(-1)) - a\frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{1} = 1 \Rightarrow 2a - \frac{a}{3} - \frac{a}{3} = 1 \Rightarrow a = \frac{3}{4}$

$$F_X(x) \overset{\text{ορ.}}{=} P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt = \begin{cases} \int_{-\infty}^{x} 0\,dt = 0, & x<-1 \\ \int_{-\infty}^{-1} 0\,dt + \int_{-1}^{x} \frac{3}{4}(1-t^2)\,dt = \frac{3}{4}x - \frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{2}, & -1 \le x \le 1 \\ \int_{-\infty}^{-1} 0\,dt + \int_{-1}^{1} \frac{3}{4}(1-t^2)\,dt + \int_{1}^{x} 0\,dt = 1, & x>1 \end{cases}$$

Άρα $F_X(x) = P(X \le x) = \begin{cases} 0, & x<-1 \\ \frac{3}{4}x - \frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{2}, & -1 \le x \le 1 \\ 1, & x>1 \end{cases}$

β) $P(X>0) = \int_{0}^{+\infty} f_X(x)\,dx = \int_{0}^{1} \frac{3}{4}(1-x^2)\,dx = \frac{1}{2}$

$P(|X|<\frac{1}{2}) = P(-\frac{1}{2} < X < \frac{1}{2}) = F_X(\frac{1}{2}) - F_X(-\frac{1}{2}) = \frac{11}{16}$

$$P\left(X \geq \tfrac{1}{2} \,\middle|\, X < \tfrac{1}{2}\right) = \frac{P\left(X \geq \frac{1}{2} \text{ κ' } X < \frac{1}{2}\right)}{P\left(X \leq \frac{1}{2}\right)} = \frac{P\left(-\frac{1}{2} < X < \frac{1}{2}\right)}{P\left(X < \frac{1}{2}\right)} = \begin{cases} F_X\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{11/16}{27/32} = \frac{11}{54} \\ \int_{-1}^{1/2} f_X(x)\,dx \end{cases}$$

Τα A, B είναι ανεξάρτητα αν $P(A \cap B) = P(A)\,P(B)$

ή $P(A/B) = P(A$

$P(A) = P(X > 0) = \frac{1}{2}$, $P(B) = P\left(-\frac{1}{2} \leq X \leq \frac{1}{2}\right) = \frac{11}{16}$

$$P(A \cap B) = P\left(X > 0 \text{ κ' } -\tfrac{1}{2} \leq X \leq \tfrac{1}{2}\right) = P\left(0 \leq X \leq \tfrac{1}{2}\right) = \begin{cases} \int_0^{1/2} f_X(x)\,dx \\ \frac{11}{32} \\ F_X\left(\frac{1}{2}\right) - F_X(0) \end{cases}$$

Άρα επειδή $P(A \cap B) = \frac{11}{32} = \frac{1}{2} \cdot \frac{11}{16} = P(A) \cdot P(B)$

δηλ. τα A, B ανεξάρτητα

γ) $E(X) \overset{\text{ορ.}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\,dx = \int_{-1}^{1} x \frac{3}{4}\left(1 - x^2\right) dx = 0$

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \int_{-1}^{1} x^2 \frac{3}{4}\left(1 - x^2\right) dx - 0 = \ldots$$

Άσκηση 2. 11/01/18

α) Σε ένα πανεπιστήμιο οι προπτυχιακοί φοιτητές είναι διπλάσιοι από τους μεταπτυχιακούς. Επίσης, 25% των μεταπτυχιακών μένουν στις φοιτητικές εστίες, ενώ 10% των προπτυχιακών μένουν στις εστίες. i) Αν ένας φοιτητής επιλεγεί στην τύχη, ποια η πιθανότητα να είναι προπτυχιακός και να μένει στις εστίες;

ii) Αν ένας φοιτητής που μένει στη Φ.Ε. επιλεγεί στην τύχη, ποια η πιθανότητα να είναι μεταπτυχιακός;

β) Νόμισμα ρίχνεται 2 φορές. Έστω τα ενδεχόμενα

$A = \{$ το πολύ μια Κ στις δύο ρίψεις $\}$

$B = \{$ μια Κ και μια Γ στις -II- -II- $\}$

Είναι τα A, B ανεξάρτητα;

Λύση: α) $\Pi = \{$ προπτυχιακός φοιτητής $\}$

$M = \{$ μεταπτυχιακός -II- $\}$

$\Phi = \{$ μένει στις εστίες $\}$

$\Pi = 2M$

Δινεται: $P(\Phi/M) = 0{,}25$

$P(\Phi/\Pi) = 0{,}1$

Αφού $\Pi = 2M$ λογικά είναι $P(\Pi) = 2P(M)$

Αλλά $P(M) + P(\Pi) = 1$

$\Rightarrow P(M) = \frac{1}{3}$, $P(\Pi) = \frac{2}{3}$

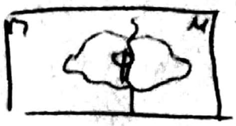
$P(\Pi \cap \Phi)$

$P(\Pi \cap \Phi) = \cancel{P(\Pi/\Phi)}\, P(\Phi)$

$P(\Pi \cap \Phi) = P(\Phi/\Pi) P(\Pi)$ ✓ $= 0{,}1 \times \frac{2}{3} = \ldots$

ii)

$$P(M/\Phi) \stackrel{\text{Bayes}}{=} \frac{P(\Phi/M)\,P(M)}{P(\Phi)} \stackrel{\Theta.\text{ο}.\Pi}{=} \frac{P(\Phi/M)P(M)}{P(\Phi/M)P(M) + P(\Phi/\Pi)\cdot P(\Pi)}$$



$$= \frac{0{,}25 \times 1/3}{0{,}25 \times 1/3 + 0{,}1 \times 2/3} = 0{,}553$$

β) Αρκεί ν.δ.ο. $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

$S = \{ΚΚ, ΚΓ, ΓΚ, ΓΓ\}$

$$\underset{2}{\uparrow} \times \underset{2}{\uparrow}$$

$A = \{ΚΓ, ΓΚ, ΓΓ\}$

$B = \{ΚΓ, ΓΚ\}$

$P(A) = \frac{\|A\|}{\|S\|} = \frac{3}{4}$, $P(B) = \frac{2}{4}$

$P(A \cap B) = \frac{\|A \cap B\|}{\|S\|} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

$P(A \cap B) = \frac{1}{2}$

$P(A)P(B) = \frac{3}{8}$

$P(A \cap B) \neq P(A)P(B)$

$\Rightarrow A, B$ εξαρτημένα

Άσκηση 3

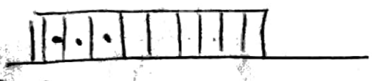
α) 10 βιβλία τοποθετούνται στο ράφι μιας βιβλιοθήκης. Ποια η πιθανότητα 3 συγκεκριμένα να τοποθετηθούν το ένα δίπλα στο άλλο;

β) Μαθηματικός έδωσε στους μαθητές 12 ασκήσεις για να επιλύσουν 6 από αυτές σαν θέματα

Μαρία → γνωρίζει να λύσει τις 8
Μαρία → δεν μπορεί να λύσει τις 4

P(Η Μαρία να λύσει 4 ή περισσότερα θέματα στις εξετάσεις) = ;

Λύση: α)



Τα 3 τα μετράω σαν 1 και μένουν 7 βιβλία άρα 7+1=8

$$P(A) = \frac{8!\,3!}{10!}$$

β) $\dfrac{4 \text{ ή } 5 \text{ ή } 6}{\text{θα λύσει σωστά στις εξετάσεις}}$

$$\frac{\binom{8}{4}\binom{4}{2}+\binom{8}{5}\binom{4}{1}+\binom{8}{6}\binom{4}{0}}{\binom{12}{6}}$$

Άσκηση 4: α) Ένα νόμισμα ρίχνεται 10 φορές και στις 6 από αυτές έρχεται Κ. Ποιος ο αναμενόμενος αριθμός Γ σε 5 ρίψεις του νομίσματος αυτού;

β) Φοιτητές επισκέπτονται γραφείο καθηγητή για ερωτήσεις. Έστω ότι επισκέπτονται το γραφείο 6 φοιτητές την ώρα. i) Ποια η πιθανότητα να επισκεφθούν το γραφείο 3 φοιτητές μεταξύ 10:00 και 10:45 το πρωί

ii) Δεδομένου ότι ένας φοιτητής μπαίνει στο γραφείο για ερώτηση ποια η πιθανότητα ο αμέσως επόμενος φοιτητής να περιμένει μεταξύ 5 και 10 λεπτών;

Λύση:

α) $P(K) = \frac{6}{10}$, $P(\Gamma) = \frac{4}{10}$

$E = \{ \text{Γράμματα} \}$

Έστω X πλήθος του $E = (=\Gamma)$
στις 5 ρίψεις

$X \sim B(n=5, p = P(E) = P(\Gamma) = \frac{4}{10})$

Ζητώ $E(x) = \sum_{x=0}^{5} x \cancel{\binom{5}{x} \left(\frac{4}{10}\right)^x} \left(\frac{6}{10}\right)^{5-x} = np = 5 \times \frac{4}{10} = 2$

β)

Έστω X πλήθος φοιτητών που επισκέπτονται το γραφείο σε 45 λεπτά δηλ. 10:00 - 10:45

$X \sim P(x)$ $\quad P_X(x) = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^x}{x!}$, $x = 0, 1, \dots$

$1h = 60 \text{ min}$ $\quad$ 6 φοιτ.
45 min $\quad \lambda = 2$, $\lambda = 4{,}5$

$P(X=3) = P_X(3) = \frac{e^{-4,5} \cdot 4{,}5^3}{3!} = 0{,}1687$